Análisis Matemático III. Curso 4.
Examen Parcial. Segunda fecha. 25 de noviembre de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. Los requisitos para aprobar están detallados en el instructivo publicado en el aula virtual de este curso.

1. Dar el mayor conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde la función $u(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2+(y+1)^2}$ es armónica. Hallar f holomorfa tal que $\mathrm{Re}[f] = u$. Obtener F que sea primitiva de f en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < 0\}$ y calcular $F(-2+i)$ y $F(-2-i)$.

2. Hallar el dominio de holomofía de la serie $\displaystyle\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-i)^{2k+2}}{9^k}$. Calcular
$$\int_{(|z|=3/2)} \left(f(z) + z\bar{z}e^{1/z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) dz \text{ siendo } f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-i)^{2k+2}}{9^k}.$$

3. Dada la la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, determinar cada uno de los dominios de $\mathbb{C}$ donde $f(z)$ admite un desarrollo de Laurent de la forma $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-1)^k$. Obtener el desarrollo de Laurent en potencias de $z-1$ de $f(z)$ válido en un entorno del infinito.

4. Para $f(z) = z^5 \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$, en cada uno de los siguientes casos, calcular, si existe:
$$i)\ \mathrm{Res}[f,0], \quad ii)\ \mathrm{Res}[f,\infty], \quad iii)\ \lim_{z\to 0} f(z), \quad iv)\ \lim_{z\to\infty} f(z)$$
Determinar qué valores puede tomar $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$ siendo C una curva simple y cerrada tal que $0 \notin C$. ¿ Qué puede observar en el caso en que $0 \in C$?